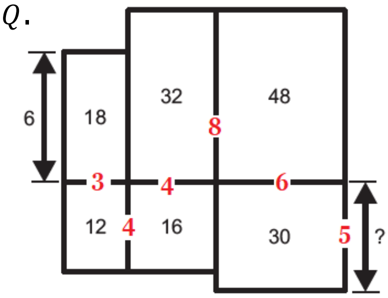
Uitwerkingen wizPROF 2021

1. A $20 \cdot 21 = 420$; $202 \cdot 1 = 202$; $202^1 = 202$; $2^0 \cdot 2^1 = 1 \cdot 2 = 2$; $(2^0)^{21} = 1^{21} = 1$

2. B De rode stukken zijn in elke wandeling samen even lang als de zijde van de gelijkzijdige driehoek en je kunt in het plaatje zien dat de gele stukken kleiner zijn dan de groene, die op hun beurt weer kleiner zijn dan de blauwe. Dus $P < R < Q$.

3. B Kijk achtereenvolgens naar de rechthoeken met de oppervlakten 18, 12, 16, 32, 48 en 30. Telkens kun je dan de afmeting van de onbekende zijde berekenen.



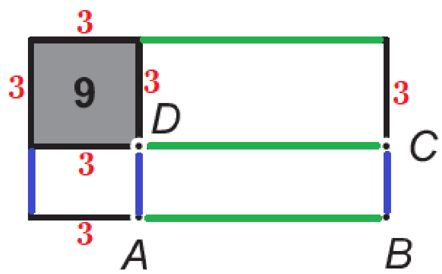
4. B In de tweede helft wordt een achterstand van 5 goals omgezet in een voorsprong van 1 goal. Het thuisteam heeft 6 goals meer gescoord en heeft de tweede helft met $12 - 6$ gewonnen. Samen met de $9 - 14$ ruststand geeft dat een eindstand $21 - 20$.

5. C De zes witte driehoeken tussen de ster en de zeshoek zijn allemaal halve ruiten met oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2\frac{1}{2}$ cm^2. De oppervlakte van de zeshoek is dan $6 \cdot 5 + 6 \cdot 2\frac{1}{2} = 45$ cm^2.

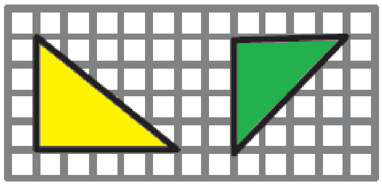
6. C De zes leden van de band zijn samen $6 \cdot 21 = 126$ jaar. De saxofonist, de trompettist en de zangeres zijn samen $126 - 19 - 20 - 21 = 66$ jaar oud. De zangeres is $\frac{66}{3} = 22$ jaar oud.

7. D Op elk wiel van het slot staan de cijfers 0, 1, 2, … , 9. De cijfers aan de achterkant van elk wiel verschillen daarom 5 met die aan de voorkant. Verder staan ze aan de achterkant op hun kop en als je aan de achterkant kijkt, dan zie je wat links staat rechts, dus in de omgekeerde volgorde.

8. C De zijden van het grijze vierkant zijn 3 cm. De groene lijnstukken zijn even lang, de blauwe zijn ook even lang. In het plaatje kun je nu zien dat de omtrek van rechthoek ABCD gelijk is aan $30 - 4 \cdot 3 = 18$ cm.



9. D De gele driehoek is niet gelijkbenig en heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$, de groene is wel gelijkbenig met oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$. Beide driehoeken zijn rechthoekig. We zoeken daarom een gelijkbenige niet-rechthoekige driehoek met oppervlakte 8 of 10. Vanwege hun rechte hoek vallen de driehoeken B en C af. A is niet gelijkbenig. De oppervlakte van driehoek E is $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ en die kan daarom ook niet. Driehoek D is niet rechthoekig, gelijkbenig en heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ en is daarom de derde driehoek.

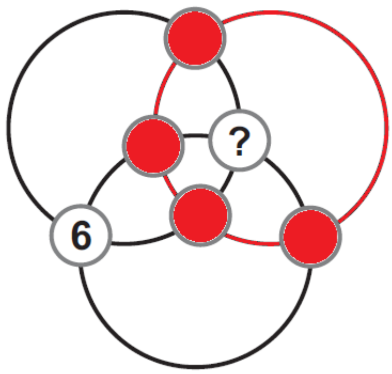


10. E Noem het getal x. Dan is $x - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}x$, waaruit volgt $\frac{9}{10}x = \frac{1}{10}$ en $x = \frac{1}{9}$.

11. D Elk van de eerste 9 sterretjes brandde $\frac{9}{10} \cdot 2 = 1{,}8$ minuut voordat de volgende werd aangestoken. Het laatste sterretje werd na $9 \cdot= 1{,}8 = 16{,}2$ minuten aangestoken. De sterretjes hebben daarom $16{,}2 + 2 = 18{,}2$ minuten gebrand, dat is 18 minuten en $0{,}2 \cdot 60 = 12$ seconden gebrand.

12. C Ahmed moet zeker op de 5^e trede komen. Daarna kan hij maar op 1 manier verder: hij moet een stap van 2 treden nemen om de 6^e trede over te slaan, waarna hij met een stap van 1 trede van de 7^e naar de 8^e trede gaat. Hij kan op 8 manieren op de 5^e trede komen: met allemaal stappen van één trede (1 manier), met één stap van twee treden en drie van één trede (4 manieren: 2111, 1211, 1121 en 1112) en met twee stappen van twee treden en één stap van één trede (3 manieren: 221, 212 en 122). Totaal dus $1 + 4 + 3 = 8$ manieren.

13. A Elk getal staat in twee grote cirkels. Als je de sommen van de drie grote cirkels optelt, krijg je daarom $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$ als antwoord. Per grote ring (dus ook voor de rode) is de som dan $\frac{42}{3} = 14$. De som van de getallen die niet in die ring staan is daarom $21 - 14 = 7$, in het vraagteken staat dus $7 - 6 = 1$.



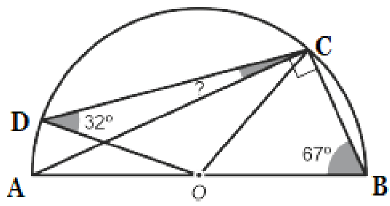
14. E Het aantal jongens dat nu op school is, is $\frac{1}{4}$ deel van de leerlingen die op school zijn. De school heeft totaal $9 + 15 + 17 + 19 + 21 = 81$ leerlingen. In de volgende tabel zijn nu alle mogelijkheden op een rij gezet:

op excursies	op school	jongens	meisjes
9	72	$\frac{72}{4} = 18$, geen klas	
15	66	$\frac{66}{4} = 16\frac{1}{2}$, kan niet	
17	64	$\frac{64}{4} = 16$, geen klas	
19	62	$\frac{62}{4} = 15\frac{1}{2}$, kan niet	
21	60	$\frac{60}{4} = 15$	$60 - 15 = 45$ $45 = 9 + 17 + 19$

De klas van 21 leerlingen is op excursie, er is een klas van 15 jongens, en er zijn 3 klassen met respectievelijk 9, 17 en 19 (samen 45) meisjes.

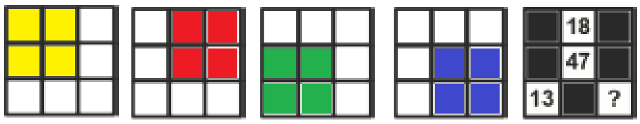
15. E Als we van de getallen die we zoeken 5 aftrekken, krijgen we getallen die deelbaar zijn door 6, 7, 8 en 9. Omdat $6 = 2 \cdot 3$, $8 = 2^3$ en $9 = 3^2$ zijn deze getallen deelbaar door $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$. De getallen die we zoeken zijn dan 5, $504 + 5 = 509$, $2 \cdot 504 + 5 = 1013$ en $3 \cdot 504 + 5 = 1517$. Dat zijn 4 getallen ($4 \cdot 504 + 5 = 2021$, dus die telt niet meer mee).

16. A $AO = CO = DO =$ de straal van de cirkel, dus de driehoeken AOC en DOC zijn allebei gelijkbenig. Maar dan is $\angle OCD = \angle CDO = 32°$. Driehoek ABC is rechthoekig, dus $\angle CAB = 180° - 67° - 90° = 23°$, maar dan is ook $\angle ACO = 23°$. De gevraagde hoek is $32° - 23° = 9°$.

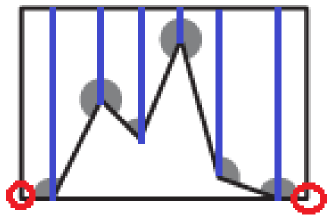


17. A Auto I haalt in ieder geval auto's III en V in en krijgt minstens 2 punten.
Auto II haalt in ieder geval auto's III, IV en V in: 3 punten.
Auto III hoeft geen auto's in te halen: 0 punten.
Auto IV haalt in ieder geval auto V in: 1 punt.
Auto V hoeft geen auto's in te halen: 0 punten.
Er worden dus minstens $2 + 3 + 0 + 1 + 0 = 6$ punten uitgedeeld.

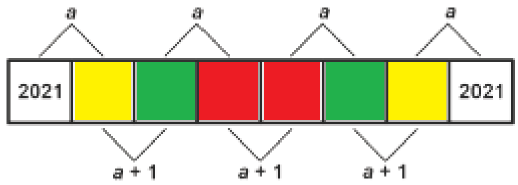
18. C Het vakje met het getal 18 kan alleen bedekt worden door de gele en de rode vierkanten. Het vakje met het getal 13 kan alleen bedekt worden door een groen vierkant. Er is dus $18 + 13 = 31$ keer een rood, geel of groen vierkant gebruikt. Die bedekten ook allemaal het vakje met het getal 47. Dat vakje moet dus $47 - 31 = 16$ keer bedekt zijn door een blauw vierkant en alleen dat vierkant bedekt ook het vraagteken.



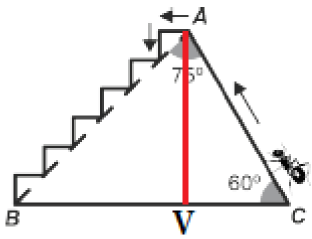
19. C Teken vanaf de hoekpunten loodlijnen (hiernaast blauw) op de bovenkant van de figuur. Je krijgt hierdoor boven het "berglandschap" 7 vierhoeken. In deze vierhoeken zijn de hoeken aan de bovenkant allemaal $90°$. De vier hoeken in een vierhoek zijn samen $360°$, daarom moeten de hoeken onder in de figuur samen $7 \cdot (360° - 180°) = 1260°$ zijn. Hierbij tel je ook de twee rechte hoeken in de rode cirkels mee, dus de aangegeven hoeken zijn samen $1260° - 2 \cdot 90° = 1080°$.



20. E De getallen in de gele en de groene vakjes naast elkaar zijn samen 1 meer dan de getallen in de witte en de gele vakjes naast elkaar, dus in de groene vakjes staat 2022. in de rode vakjes staat dan $a - 2022$. De getallen in de twee rode vakjes zijn samen $2(a - 2022) = 2a - 4044$ en dat moet $a + 1$ zijn. Dus $2a - 4044 = a + 1$, ofwel $a = 4045$.



21. C In de figuur hiernaast is $AV \perp BC$ en $\sin(60°) = \frac{AV}{CA}$, dus $CA = \frac{AV}{\sin(60°)} = \frac{AV}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2AV}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AV$, $\angle CAV = 180° - 90° - 60° = 30°$ en $\angle BAV = 75° - 30° = 45°$. Dan is de lengte van de trap AB gelijk aan $AV + BV = 2AV$, want driehoek ABV is gelijkbenig (twee hoeken van $45°$). $\frac{CA}{AB} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot AV}{2AV} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



22. B Als $a + b + c = 0$, dan is $a + b = -c$, $b + c = -a$ en $c + a = -b$ en $(a + b)(b + c)(c + a) = -c \cdot -a \cdot -b = -abc = -78$.

23. A Het kleinste getal met cijfersom 2021 is $5999 \ldots 99999$ (eindigend met $\frac{2021-5}{9} = 224$ negens). $5999 \ldots 99999 + 2021 = 600 \ldots 02020$. De som van de cijfers van dit getal is $6 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 2 + 0 + 2 + 0 = 10$.

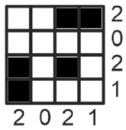
24. E Sam kan op twee manieren 19 punten hebben behaald.

- $6 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 19$; er zijn dan 3 woorden die elke jongen heeft opgeschreven. Dan heeft elke jongen maximaal $7 \cdot 3 = 21$ punten gehaald. De behaalde punten (allemaal verschillend, minstens 19) zijn dan 19, 20 en 21. Maar 20 punten halen uit 7 woorden die elk 1 of 3 punten opleveren gaat niet: 7 oneven getallen optellen geeft een oneven antwoord. Deze mogelijkheid om 19 punten te halen kan niet.
- $5 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 19$. Er is dan één woord dat elke jongen heeft opgeschreven en er zijn 4 woorden die behalve Sam ook zijn opgeschreven door een van de andere twee jongens. De tweede jongen kan niet alle 4 deze woorden hebben opgeschreven (want dan zou die evenveel punten hebben als Sam), ook geen 2 (dan zou hij evenveel punten hebben als Colin) en ook niet minder dan 2 (want dan zou hij meer punten hebben als Colin). Dus de tweede jongen heeft 3 van deze woorden en Colin 1. Deze twee jongens hebben ook geen andere woorden gelijk, want dan zou de tweede jongen evenveel punten hebben als Sam. Dus Colin heeft 1 woord hetzelfde als Sam, 1 woord hetzelfde als beide andere jongens en 8 woorden alleen en heeft daarmee $8 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 25$ punten gehaald.

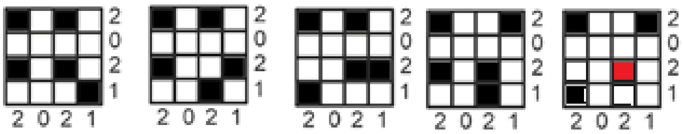
25. A Van iedere vijf ballen achter elkaar is er precies één rood, één geel, één blauw en twee groen. Als je dan naar zes ballen achter elkaar kijkt, dan zie je dat de eerste en de laatste bal dezelfde kleur moeten hebben. Dus de ballen $1, 6, 11$, enz. hebben allemaal dezelfde kleur. Ook de ballen $2, 7, 12$, enz. hebben een gelijke kleur. Hetzelfde geldt ook voor de ballen $3, 8, 13$, enz., de ballen $4, 9, 14$, enz. en de ballen $5, 10, 15$, enz. Maar dan zijn de ballen 2 en 5 beiden groen. De ballen 3 en 4 zijn dan rood en geel, de bal 1 en de bal 2021 zijn dan beiden blauw.

26. D Als $a = m^2$ en $b = n^2$ dan is $a - b = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$ een priemgetal, dus moet $m - n = 1$ en $m = n + 1$. Nu volgt $a - b = (n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$.
Voor $b = 100$ is $n = 10$ en $a - b = 2n + 1 = 21$, geen priemgetal.
Voor $b = 144$ is $n = 12$ en $a - b = 2n + 1 = 25$, geen priemgetal.
Voor $b = 256$ is $n = 16$ en $a - b = 2n + 1 = 33$, geen priemgetal.
Voor $b = 900$ is $n = 30$ en $a - b = 2n + 1 = 61$, een priemgetal.
Voor $b = 10000$ is $n = 100$ en $a - b = 2n + 1 = 201$, geen priemgetal.

27. D Als het hokje linksboven wit is, dan moeten de laatste twee hokjes in de bovenste rij zwart zijn, evenals de twee onderste in de eerste kolom. Je kunt de tabel dan maar op 1 manier afmaken, zie hiernaast.



Als het hokje linksboven zwart is, dan moet één van de laatste twee hokjes in de bovenste rij zwart zijn. Ook moet één van de onderste twee hokjes in de eerste kolom zwart zijn. Kies je voor beiden het derde hokje, dan is er zowel één mogelijkheid om het af te maken als het hokje in de derde rij én derde kolom zwart is en als dat hokje wit blijft, zie de eerste twee ingevulde tabellen hieronder. Kies je één keer voor het derde hokje en één keer voor het laatste hokje, dan is er in beide gevallen maar één manier om het af te maken, zie de derde en vierde ingevulde tabellen hieronder. Kies je ervoor om zowel in de eerste rij als de eerste kolom dan het laatste hokje zwart te maken, dan kun de tabel niet afmaken: je kunt in de derde rij en kolom alleen het rode hokje kleuren. Je kunt de tabel dus op 5 manieren kleuren.



28. D $1000 = 1 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ en $1000 = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. De getallen bestaan dus uit drie keer een 5 en twee andere cijfers, een 1 en een 8 òf een 2 en een 4. Het eerste van de twee andere cijfers kun je op 5 plaatsen neerzetten, de tweede daarna nog op 4. Het aantal getallen gelijk aan $5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 40$.

29. D We beginnen met vier geldstukken. De kleinst mogelijke gewichten zijn 1, 2, 3 en 4, maar dat kan niet: de geldstukken van 2 en 3 zijn dan samen even zwaar als die van 1 en 4 samen. Dus maken we het zwaarste geldstuk 1 zwaarder, het krijgt gewicht 5. Nu voegen we een geldstuk toe. De twee zwaarste geldstukken tot nu toe hadden gewicht 3 en 5, samen 8. Als we het nieuwe geldstuk gewicht 8 geven, dan weegt het samen met een ouder geldstuk minstens 9, dus zwaarder dan elk tweetal oudere geldstukken. We hebben nu vijf geldstukken met gewichten $1, 2, 3, 5$ en 8. De twee zwaarste van deze wegen samen $5 + 8 = 13$. Een nieuw geldstuk van gewicht 13 weegt samen met een oudere weer meer dan elk tweetal oudere samen. Zo kunnen we doorgaan: we nemen telkens het gewicht van de nieuwe gelijk aan de twee zwaarste tot dan toe. De kleinst mogelijke gewichten van de acht geldstukken zijn (van licht naar zwaar) daarom $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$.

30. C Trek de hoogtelijn EF met lengte x van driehoek DGE. Hiermee krijgen we in de figuur hiernaast drie congruente rechthoekige driehoeken (blauw in de figuur): ze hebben allemaal een zijde van het grote vierkant als schuine zijde, een rechte hoek en een zelfde scherpe hoek (rood in de figuur), vanwege $\angle BAG = \angle CAD = \angle ADE = 90°$. Dus $EF = DG = BC = x$. De oppervlakte van driehoek DGE is gelijk aan $\frac{1}{2} \cdot DG \cdot EF = \frac{1}{2}x^2 = 1$, dus $x^2 = 2$. Met de stelling van Pythagoras volgt dan $AC^2 = 4^2 + x^2 = 16 + 2 = 18$, dus het grote vierkant heeft oppervlakte 18.